SIQUEIRA, Jhônatas Edwardo Faria de; SALDANHA, Andreia R. Simoni. Dinâmica não linear e caos: uma análise do sistema de Duffing. In: WORKSHOP DE INOVAÇÃO, PESQUISA, ENSINO E EXTENSÃO, 4., 2019, São Carlos, SP. **Anais**... São Carlos, SP: IFSP, 2019. p. 186-189. ISSN 2525-9377.

DINÂMICA NÃO LINEAR E CAOS: UMA ANÁLISE DO SISTEMA DE DUFFING

JHÔNATAS EDWARDO FARIA DE SIQUEIRA; ANDREIA R. SIMONI SALDANHA

Instituto Federal de São Paulo, Campus São Carlos, São Carlos, São Paulo, Brasil.

RESUMO: O sistema de Duffing é um modelo matemático muito empregado para descrever diversos fenômenos. Muitos fenômenos físicos possuem comportamento não linear caracterizado por forte dependência com suas causas, de forma que, com a mínima alteração dessas, altera-se todo o sistema que abarca o fenômeno. Houve, durante muito tempo, uma tendência de analisar sistemas físicos simplificando-os a partir de métodos de linearização. Em alguns fenômenos, devido sua complexidade e natureza, a utilização de métodos linearização não consegue descrevê-los com a precisão necessária. As equações de Duffing estabelecem uma forma de análise que permite compreender sistemas com essa complexidade. Este trabalho tem como objetivo analisar e estudar o sistema de Duffing e seu comportamento, identificando respostas caóticas que podem aparecer nos modelos.
PALAVRAS-CHAVE: Sistema Duffing. Respostas Caóticas. Sistemas Dinâmicos.

ABSTRACT: The Duffing system is a very employed mathematical model in several phenomena, for describe them. A lot of physical phenomena have a nonlinear behavior that is characterized by a strong dependence with its causes. Then, the minimal change in the causes can change all of the system that encompass the phenomenon. For a long time, there was a tendency to analyze physical systems from linearization methods, simplifying the. In some phenomena, the use of linearization methods can not describe them with the necessary precision. The Duffing equations establish a way of analysis that allows to understand systems with this complexity. This study aims to analyze and study the Duffing System and its behavior, identifyind chaotic responses that can appearin the models.
KEYWORDS: Duffing System. Chaotic Response. Dynamical Systems.

INTRODUÇÃO

Os fenômenos que ocorrem no mundo podem ser, de certa forma, descritos por sistemas que nos ajudam a analisar causas, e a prever as consequências destes. Esses sistemas, por sua vez, são modelados e obtidos a partir de leis e equações matemáticas. Essas equações são obtidas através da experimentação e da observação do comportamento dos mesmos fenômenos, ou através da indução matemática.

Os sistemas dinâmicos não lineares podem ter respostas diferentes, classificadas em: caos ou aleatoriedade. Os fenômenos aleatórios dizem respeito a sistemas não determinísticos, ou seja, sistemas que possuem entradas e respostas aleatórias. Por outro lado, os fenômenos caóticos são determinísticos, ou seja, para uma entrada completamente conhecida se tem uma resposta completamente aleatória. (SAVI, 1997).

O sistema de Duffing é considerado um exemplo clássico de sistema dinâmico com resposta caótica e seu estudo permite avaliar sobre que condições das variáveis do sistema surge esse comportamento e observar fenômenos parecidos em outros sistemas mecânicos.

Neste trabalho faremos o estudo da dinâmica do sistema de Duffing, obtendo suas equações e construindo rotinas para caracterizar o comportamento caótico e discutir outros sistemas mecânicos que podem apresentar o mesmo comportamento.

JUSTIFICATIVA:

O desenvolvimento de pesquisas para estudo do comportamento dinâmico dos sistemas está atrelado à necessidade existente de se determinar, com maior precisão, as respostas de produtos projetados pela engenharia. Essa necessidade pode ser explicada de forma simples, pois, uma vez que os um produto qualquer é projetado, deve se ter em mente os tipos de esforços e comportamentos este apresentará durante sua vida útil. Caso essas informações não sejam precisas, teremos o problema de expor nosso produto a esforços não dimensionados que podem impedir seu funcionamento ideal. (LIMA, 2008)

O sistema de Duffing é um exemplo de sistema natural simples descrito através de modelo não linear, esse sistema possui uma dinâmica muito rica, passível de exibir um comportamento caótico.

A equação de Duffing é usada para descrever a dinâmica não linear de sistemas elétricos e mecânicos, e descreve a resposta de uma série de fenômenos físicos importantes, além do sistema massa-mola, como, por exemplo, um circuito elétrico com uma indutância não-linear e o movimento do pêndulo.

Sendo assim, o estudo dessa equação leva a uma análise muito rica sobre a dinâmica dos sistemas não lineares.

OBJETIVOS

O objetivo desse trabalho é analisar o comportamento de um sistema de Duffing de um grau de liberdade. São construídas rotinas para obtenção de gráficos que permitem relacionar os parâmetros e a dinâmica do sistema e identificar o comportamento caótico.

MATERIAIS E MÉTODOS

O sistema de Duffing foi estudado e foram definidas as equações que descrevem seu comportamento. Após a modelagem do sistema, o software livre Scilab ® foi utilizado para implementação de rotinas para construção dos gráficos que permitem o estudo das propriedades dinâmicas do sistema com a variação dos parâmetros e identificação do comportamento caótico. Os gráficos ilustram o comportamento esperado para estas condições, porém, é iimportante ressaltar que, o próprio hardware usado pode influenciar os resultados, uma vez que cada tipo de computador possui seu próprio processador e tem sua específica limitação de varáveis. É até mesmo possível ocorrer mudanças utilizando se do mesmo computador, quando ocorre mudanças infinitesimais das varáveis utilizadas.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para analisar um sistema qualquer, deve-se seguir alguns procedimentos simples, como:

1. identificar o sistema e seus parâmetros;
2. escrever equações que relacionem cada componente do sistema;
3. modelar matematicamente a partir de leis físicas adequadas que se aplicam ao sistema;
4. resolver o modelo matemático;
5. criar um projeto para o sistema para ser experimentado e confirmar as equações determinadas teoricamente.

Para se ter as respostas desse sistema, basta resolver as equações diferenciais obtidas a partir da modelagem matemática do problema.

Os sistemas dinâmicos podem ter diferentes respostas, dependendo dos parâmetros da equação, e podem ser classificadas como:

1. estáveis, que convergem a um ponto;
2. periódicos, que possuem oscilações previsíveis;
3. imprevisíveis.

Após os estudos de Lorenz em 1963, descobriu se uma fundamentação sólida para os sistemas de resposta caótica, que pode ser descrito por equações diferenciais determinísticas simples.

A equação (1) apresenta o modelo do sistema de Duffing.

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega_n{}^2 x \pm \alpha x^3 = F\cos(\omega t) \quad (1)$$

onde

ω_n- frequência natural de oscilação, $1/s$;

c- amortecimento, $1/s$;

α- termo de não linearidade, c;

F- forçamento, m/s^2;

Observa-se que com a variação dos parâmetros podemos obter diferentes respostas para o sistema.

Por ser simples e, ao mesmo tempo, capaz de descrever problemas complexos, o modelo do Sistema de Duffing é utilizado também em vários tipos de problemas mecânicos, *e.g.*, o artigo do sr. eng. Lucas Takahiro Conde Oyamada, que utiliza as equações de Duffing para análise de Ruído Knock em caixa de direção altomotiva.

CONCLUSÕES

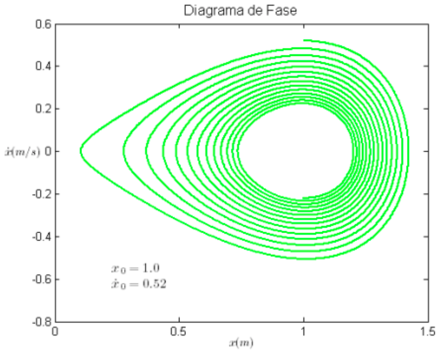
A partir da equação (I), foi feito uma rotina no Scilab ® para a obtenção de gráficos que demonstrassem as respostas caóticas. Para solução das funções, foi utilizado o método Runge Kutta de 4° grau, que já está nas bibliotecas do próprio software. O resultado da equação (I) é obtido através de integração numérica.

Como já foi dito, o sistema deve ser discreto para que, dentro de um certo período de amostragem, possamos observar o seu comportamento. Utilizando os parâmetros de Forçamento, Amortecimento, Frequência natural. A partir disso, uma rotina foi gerada pelo SciNotes ® que será demonstrada.

A partir dela, gráficos como esses apresentados no *Estudo de Modelos Dinâmicos não lineares* (LIMA,2008), podem ser gerados a partir da mudança de variáveis:

Os gráficos a seguir mostram os diagramas de fases a partir da derivação da função *x*, conforme a equação (I), utilizando os valores da frequência de oscilação e do termo de não linearidade de -0,5 e 0,5; respectivamente. No caso apresentado na FIGURA 1, o sistema oscila em torno do ponto de equilíbrio $x\ (t \to \infty) = +1$.

FIGURA 1: Exemplo de Diagrama de Fases gerado por software.



AGRADECIMENTOS

Agradeço ao IFSP pelo apoio financeiro através do PIBIFSP.

REFERÊNCIAS

ABARBANEL, H.; BROWN, R.; SIDOROWICH, J.J.; TSIMRING, L.S. **The Analysis of Observed Chaotic in Physical Systems**, Reviews of Modern Physics, v.65, pp.1331-1392, 1993.

ALLIGOOD, K.T.; SAUER, T.D.; YORKE, J.A. **Chaos: An Introduction to Dynamical Systems**, Springer-Verlag, 1997.

CAMPANHARO A. S. L. O.; MACAU E. E. N.; RAMOS F. M., **Detectando a presença de caos em uma série temporal**, XXVIII CNMAC, São Paulo, 12 a 15 de setembro, 2005.

DIACU, F., **The solution of the n-body problem**, Springer New York: The Mathematical Intelligencer, 18, p.66-70, 1996.

LIMA. **Estudo de modelos dinâmicos lineares e não lineares.** Departameto de Engenharia Mecânica, PUC-RJ, 2008

MONN, F. **Chaotic Vibration: An Introduction for Applied Scientists and Engineers**. New York: Wiley, 1987.

OYAMADA. **Análise de Ruído Knock Noise em Caixa de Direção Automotiva: Modelos de Cremalhadeira Rígida Flexível.** USP - SP, 2010.

SAVI, M. **Caos em Sistemas Mecânicos**, Revista Militar de Ciência e Tecnologia, v.XIV, n.4, pp.5-18, 1997.

SAVI, M. **Dinâmica não linear e caos**. Rio de Janeiro: E-papers, 2006.

VALÉRIO, L. R. **Dinâmica não linear e caos: o circuito de Chua,** Trabalho de Conclusão de Curso, UNIFAL – MG, 2014.